**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**
**Universidad del Perú. Decana de América**
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

# Dinámica asintótica de una ecuación de onda elástica en un ambiente isotrópico

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**AUTOR**

Lito Edinson BOCANEGRA RODRÍGUEZ

**ASESOR**

Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2019

**Referencia bibliográfica**

Bocanegra, L. (2019). *Dinámica asintótica de una ecuación de onda elástica en un ambiente isotrópico*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor: 0000-0001-6726-8667

Código Orcid del asesor: 0000-0001-8279-7460

DNI del autor: 44374253

Grupo de investigación: Dynamical systems, differential equations and their applications

Instituto que financia parcial o totalmente la investigación: Autofinanciada

Ubicación geográfica dónde se desarrolló la investigación: Av. Universitaria s/n. cruce con Av. Venezuela cdra. 34, Lima. Coordenadas 12°03′30″S 77°05′00″O / -12.058333333333, -77.083333333333

Año o rango de años que la investigación abarcó: 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

## Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ..12:30 p.m.. horas del Jueves 26 de setiembre de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (PRESIDENTE), Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO), Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «DINÁMICA ASINTÓTICA DE UNA ECUACIÓN DE ONDA ELÁSTICA EN UN AMBIENTE ISOTRÓPICO», presentado por el señor Bachiller LITO EDINSON BOCANEGRA RODRÍGUEZ, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

...Dieciocho (sobresaliente)...( 18 ).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra, manifestó que el señor Bachiller LITO EDINSON BOCANEGRA RODRÍGUEZ, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ..13:30... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. ALFONSO PÉREZ SALVATIERRA
PRESIDENTE

DR. JORGE LUIS CRISÓSTOMO PAREJAS
MIEMBRO

DR. YONY RAÚL SANTARIA LEUYACC
MIEMBRO ASESOR

Este trabajo es dedicado a todos mis seres queridos y amigos

# Índice general

# Resumen


En este trabajo se estudia una clase de ecuaciones de ondas de la forma

$$\partial_t^2 u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \alpha \partial_t u + f(u) = b(x), \tag{1}$$

definida en un dominio acotado $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$, con condición de frontera de Dirichlet y parámetros de Lamé, $\lambda > 0$, $\lambda + \mu > 0$.

En estas ecuaciones aparece el operador de elasticidad(operador de Lamé) $-\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u)$, el cual han sido estudiados por diversos autores a lo largo de los años. Respecto a la existencia, unicidad y dependencia continua en relación con los datos iniciales se utilizara Teoria clásica de semigrupos lineales ver [2],[23], [37].

El objetivo de este trabajo es probar la existencia de un atractor global para el sistema dinámico asociado al problema, el cual será caracterizado por las variedades inestables del conjunto de puntos estacionarios de la ecuación (1). Con este fin, se seguirá principalmente el trabajo de I. Chueshov, et al. [15].



**Palabras Claves**: Atractores globales, Operador de Lamé, Parámetros de Lamé.

# Abstract

In this work we study a class of wave equations of the form

$$\partial_t^2 u - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \alpha\partial_t u + f(u) = b(x),$$

defined in a bounded $\Omega$ domain of $\mathbb{R}^3$, with Dirichlet boundary condition and Lamé parameters, $\lambda > 0$, $\lambda + \mu > 0$.

In these equations the elasticity operator (Lamé operator) $-\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u)$ appears, which have been studied by several authors over the years. Related to the existence, uniqueness and continuous dependence in relation to the initial data we follow classic theory of linear semigroup [2],[23], [37].

The aim of this work is to prove the existence of a global attractor for the dynamic system associated to the problem, which will be characterized by the unstable varieties of the set of stationary points of the equation (1). For the sake of it, we follow mainly the results of I. Chueshov et al. in [15].

**Key words**: Global attractors, Lamé operator, Lamé parameters.

Capítulo 1

# Introducción

En el presente trabajo se estudia la dinámica asintótica de una ecuación de ondas no lineal como en (1), definida en una región acotada de $\mathbb{R}^3$, junto con datos iniciales y condiciones de frontera del tipo Dirichlet.

El problema (1) suscita gran interés, principalmente por las aplicaciones de las ecuaciones de onda elástica en sismología, electromagnetismo, acústica, entre otras. Uno de los principales problemas a estudiar es el comportamiento asintótico del sistema dinámico asociado con (1), que no está explícito en la literatura al considerar las fuerzas estructurales no lineales junto con una amortiguación por fricción.

A continuación presentamos una breve revisión de los resultados asociados a ondas elásticas.

Lamé [31], demostró experimentalmente que la Ley de Hooke para cuerpos elásticos en un medio isotrópico, requiere satisfacer ecuaciones con constantes múltiples, definiendo asi para ciertos materiales los valores de $\lambda$ y $\mu$. Este análisis es preservado por Love [32] y Kolsky [28] definiendo el modelo de propagación de ondas vectoriales en cuerpos elásticos como

$$\partial_t^2 u - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

En la teoría de rayos, diversos autores han estudiado las aplicaciones de las ondas elásticas a lo largo de la historia (cf. [27, 16, 41, 11, 12] entre otros), por ejemplo, en el caso del electromagnetismo, Hansen [24] y Stratton [40] usaron ondas vectoriales para describir el fenómeno físico, por lo que más adelante, se mostró la utilidad de las ondas elásticas en este campo (ver [36, 19] entre otros), debido principalmente a generalizaciones mediante el uso de sistemas de coordenadas.

Otro aspecto fundamental de las ecuaciones elásticas en un medio isotrópico es que permiten a través de la descomposición de Helmholtz, la división del sistema en dos tipos de ondas, las ondas $P$ y las ondas $S$ (cf. [31, 34, 3]), mientras que en medio anisótropa es posible descomponerse en tres tipos de ondas, una cuasi compresiva y dos cuasi cizalla (cf. [11, 10] entre otras). En sismología, estas ondas representan las ondas de compresión ($P$ -waves) y las ondas de corte ($S$ -waves), que describen las vibraciones internas en el cuerpo.

Por otro lado, Jhon [20] y Sideris [39] estudiaron la buena colocación de las ecuaciones de movimiento para $u(x,t)$ en un espacio de llenado de material homogéneo, isotrópico e hiperelástico, es decir, $\mathcal{F} = F(\nabla u)\nabla^2 u$ en (1.1). En estos casos, se considera que el material del cuerpo cumple con que la densidad de energía potencial se caracteriza por una función de energía almacenada.

Respecto a la ecuación elástica $(1{,}1)$ con $\mathcal{F} = 0$, Yamamoto [43, 44] demostró el decaimiento exponencial de la energía de la ecuación anterior con la condición de Dirichlet utilizando métodos de análisis microlocal.

En el caso en que la disipación es no lineal sobre la frontera, Lagnese [30] y Komornik [29] demostraron diferentes tipos de decaimiento de energía para el sistema unidimensional y bidimensional $(1{,}1)$, dependiendo de ciertas perturbaciones en el tensor de tensiones sobre una parte en el límite del dominio. En [29] se muestran estimativas óptimas cuando el dominio es una bola en $\mathbb{R}^3$. En este mismo contexto, Martínez [33] generalizó estos resultados para el caso en que el tensor de tensiones depende de tres parámetros (cristales cúbicos). Para las condiciones de retroalimentación de límites no lineales, Horn [25, 26] mostró diferentes resultados de estabilidad para el sistema asociado del análisis microlocal (cf. [44, 43]) y métodos de multiplicadores para el control sobre la frontera.

Considerando en $(1{,}1)$ un término de disipación interna, por ejemplo $\mathcal{F} = -a(x,t)g(\partial_t u)$, Guesmia [21, 22] y Bellassoued [8] probaron diferentes resultados de observabilidad, descomposición exponencial de la energía y control exacto apartir del estudio de la condición geométrica del control (ver [5] entre otros). En este mismo contexto, al considerar las fuerzas externas bien comportadas en un entorno tridimensional, Bchatnia y Daoulatli [6] estudiaron el decaimiento de la energía al contrastar el crecimiento del amortiguador con el crecimiento de las fuerzas externas.

Sobre un entorno viscoelástico en $(1{,}1)$ y considerando $\mathcal{F} = -\int_0^\infty g(s)\Delta u(t,-s)ds$, Bchatnia y Guesmia [7], demostraron el decaimiento exponencial de la energía en condiciones de Dirichlet usando la técnica de Dafermos [17] y el método de los multiplicadores.

Este último resultado, junto con la bibliografía antes mencionada, sirve de motivación para el estudio de la dinámica y sobre todo de la existencia de un atractor global usando cuasi estabilidad.

El planteamiento y resolución del problema planteado en esta tesis se dará en 3 etapas

- Exposición de las definiciones básica para el desarrollo de la tesis

- Semigrupo de soluciones para la ecuación $(1)$.

  A partir de la buena colocación de la ecuación (1), se define el semigrupo de soluciones a partir de la Definición 2.17 presentada en la sección 2.2. Con lo cual podremos probar

  $(i)$ $S(0) = I$.

  $(ii)$ $S(t+s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geq 0$.

  $(iii)$ La aplicación $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \longmapsto S(t)(x) \in X$ es continua para cada $x \in X$ dado.

- Atractor global para el semigrupo asociado a la ecuación dada en (1).

  Como paso final pasamos a demostrar la existencia de Atractor global ( Definición 2.19) presentada en la sección 2.2. La prueba se hará principalmente probando los siguientes hechos

  $(i)$ $A$ genera un sistema dinámico disipativo.

  $(ii)$ $A$ es asintóticamente compacto.

Capítulo

2

# Preliminares

En este capítulo se presenta algunos resultados sobre los espacios de Sobolev, los sistemas dinámicos y el problema de Cauchy, los cuales nos brindaran una buena base teórica para el desarrollo del presente trabajo.

## 2.1 Espacios de Sobolev

Presentaremos a continuación definiciones y teoremas relacionados a los espacios de Sobolev. Para más información, el lector interesado puede consultar [1, 9].

**Definición 2.1.** *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Se representará por $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, al espacio vectorial constituido por las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles, cuya potencia $p$, $|f|^p$ es Lebesgue integrable, esto es:*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ es medible y} \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$$

*Se define en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a la relación $\sim$ dada por:*

$$f \sim g \Leftrightarrow f \equiv g \ \text{ casi siempre en } \Omega.$$

*Notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Así, tiene sentido considerar el cociente de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ por $\sim$. La colección de las clases de equivalencia obtenida por $\frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim}$ forma un espacio vectorial, que denotaremos por:*

$$L^p(\Omega) := \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim}$$

*en el cual definimos la norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \textit{donde } u \in L^p(\Omega).$$

**Definición 2.2.** *Una función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada esencialmente acotada, si existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ casi siempre (c.s.) en $x \in \Omega$. La colección de las clases de equivalencia de las funciones definidas en $\Omega$ por la relación $\sim$ es esencialmente acotada es denotada por $L^\infty(\Omega)$. Se Define la norma en $L^\infty(\Omega)$ por:*

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| = inf\{C > 0; |u(x)| \leq C \ \ \textit{c.s. en } x \in \Omega\}$$

Es posible mostrar que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, además, para el caso particular $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno es dado por:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

donde $u$ y $v$ pertenecen a $L^2(\Omega)$.

**Lema 2.3.** *(Desigualdad de Young). Sea $1 < p, q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \ \ \forall a, b \geq 0.$$

***Demostración.*** Ver [9]. ■

**Lema 2.4.** *(Desigualdad de Young con $\epsilon$). Sea $1 < p, q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $\epsilon > 0$ cualquier. Entonces,*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q, \ \ \forall a, b \geq 0,$$

*donde $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{-q}{p}} q^{-1}$. En el caso particular cuando $p = q = 2$, dicha desigualdad se reduce a*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2, \ \ \forall a, b \geq 0.$$

***Demostración.*** Este lema es una aplicacion de la Desigualdad de Young. En efecto, dado $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} ab = \left[ (\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a \right] \left[ \frac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}} \right] &\leq \frac{\left[ (\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a \right]^p}{p} + \frac{\left[ \frac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}} \right]^q}{q} \\ &\leq \epsilon a^p + \frac{[b]^q}{(\epsilon p)^{\frac{q}{p}} q} \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.5.** *(Desigualdad de Holder). Sea $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, con $1 \leq p, q < \infty$ y tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces:*

$$uv \in L^1(\Omega) \quad y \quad \int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L(\Omega)^q}$$

***Demostración.*** Ver [1, 9]. ■

**Teorema 2.6.** *(Desigualdad de Holder Generalizada). Sea $1 \leq p_1, p_2, ..., p_n \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \leq 1$. Si $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, ..., n$, entonces:*

$$u := \prod_{i=1}^{n} u_i \ \in L^r(\Omega) \quad y$$

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

***Demostración.*** Ver [1, 9]. ■

**Teorema 2.7.** *(Lema de Inmersión). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto abierto con medida finita, $p$ y $q$ tales que $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces:*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

***Demostración.*** Ver [1, 9]. ■

**Definición 2.8.** *Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. El Espacio de Sobolev de orden $m$ modelado sobre $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$, es el espacio vectorial de las funciones en $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas distribucionales de orden $\alpha$ pertenecen a $L^p(\Omega)$, para todo multi-indice $\alpha$ con $|\alpha| \leq m$. Es decir:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ \alpha \text{ multi-índice tal que } \ |\alpha| \leq m\}.$$

*Cuando $1 \leq p < \infty$. No es difícil mostrar que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio normado dotado con la norma:*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Análogamente, $W^{m,\infty}(\Omega)$ es un espacio normado dotado con la norma:*

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Teorema 2.9.** *Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$.*

- *Los espacios $W^{m,p}(\Omega)$ son espacios de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*
- *Los espacios $W^{m,p}(\Omega)$ son espacios reflexivos para $1 < p < \infty$.*
- *Los espacios $W^{m,p}(\Omega)$ son espacios separables para $1 \leq p < \infty$.*
- *En el caso particular, cuando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno*

$$\langle u, v\rangle_{W^{m,2}(\Omega)\times W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

  *Dicho espacio lo denotaremos por $H^m(\Omega)$.*

***Demostración.*** Ver [1, 9]. ■

**Definición 2.10.** *Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como:*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

*esto es, como la cerradura del espacio de las funciones de prueba respecto a la norma $W^{m,p}(\Omega)$. En el caso $p = 2$, denotaremos $H_0^m(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$.*

**Definición 2.11.** *Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ como:*

$$[W_0^{m,p}(\Omega)]' =: W^{-m,p'}(\Omega),$$

*donde $p$ e $p'$ son exponentes conjugados. En el caso p=2, denotaremos $[H_0^m(\Omega)]' =: H^{-m}(\Omega)$.*

**Teorema 2.12.** *(Inmersiones de Sobolev). Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un dominio y, para $1 \leq k \leq n$, sea $\Omega_k$ la intersección de $\Omega$ con el plano de dimensión $k$ en $\mathbb{R}^n$. (Si $k = n$ entonces $\Omega_k = \Omega$.) Si $j \geq 0$ y $m \geq 1$ son números enteros dados y si $1 \leq p < \infty$.*

- *PARTE I: Suponga que $\Omega$ cumple la condición del cono.*
    - *Caso A: Si $mp > n \quad o \quad m = n \quad y \quad p = 1$, entonces:*

    $$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

    *Además, si $1 \leq k \leq n$, entonces:*

    $$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \ \ para\ p \leq q \leq \infty,$$

*y, en particular,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ para \ p \le q \le \infty.$$

- *Caso B: Si* $mp = n$ *y* $1 \le k \le n$, *entonces:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \ \ para \ p \le q < \infty,$$

*y, en particular,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ para \ p \le q < \infty.$$

- *Caso C: Si* $mp < n$ *y, o bien,* $n - mp < k \le n$ *o* $p = 1$ *y* $n - m \le k \le n$, *entonces:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \ \ para \ p \le q \le p* = \frac{kp}{n - mp},$$

*y, en particular,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ para \ p \le q \le p* = \frac{kp}{n - mp}.$$

- *PARTE II: Suponga que* $\Omega$ *satisface la condición fuerte local de Lipschitz. Entonces el espacio* $C_B^j(\Omega)$ *del caso A, puede ser sustituido por el espacio menor* $C^j(\bar{\Omega})$, *y las inmersiones pueden ser reescritas como:*

  - *Si* $mp > n > (m-1)p$, *entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \ \ para \ 0 < \lambda \le m - \frac{n}{p}.$$

  - *Si* $n = (m-1)p$, *entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \ \ para \ 0 < \lambda < 1.$$

  - *Si* $n = m - 1$ *e* $p = 1$, *entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,1}(\bar{\Omega}).$$

  *Recordemos que* $C^{j,\lambda}(\bar{\Omega})$ *representa el espacio de las funciones en* $C^j(\bar{\Omega})$ *cuyas derivadas de orden* $\lambda$ *son* $j$*-Holder continuas.*

- *PARTE 3: Todas las inmersiones de la parte A y B son válidas para* $\Omega$ *un dominio arbitrario si los espacios de Sobolev envueltos en dichas partes, son sustituidos por sus* *correspondientes $W_0$-espacios.*

***Demostración.*** Ver [1]. ■

**Observación 2.13.** *En el caso de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, la mejor constante de dicha inmersión es dada por $\lambda_1$, siendo $\lambda_1$ el primer autovalor del operador $-\Delta$. Esto es, si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces*

$$\lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

*con*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

**Teorema 2.14.** *(Teorema de Rellich-Kondrachov). Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0$ un subdominio acotado de $\Omega$, y $\Omega_0^k$ la intersección de $\Omega_0$ con un plano $k$-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Sea $j \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros, y $1 \leq p < \infty$.*

- *PARTE I: Si $\Omega$ satisface la condición del cono y $mp \leq n$, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \ \text{ si } 0 < n - mp < k \leq n \text{ e } 1 \leq q < \frac{kp}{n-mp}.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \ \text{ si } n = mp, 1 \leq k \leq n \text{ e } 1 \leq q < \infty.$$

- *PARTE II: Si $\Omega$ satisface la condición del cono y $mp > n$, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C_B^j(\Omega_0)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \ \text{ si } 1 \leq q < \infty.$$

- *PARTE III: Si $\Omega$ satisface la condición fuerte local de Lipschitz, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^j(\bar{\Omega}_0^k) \ \text{ si } mp > n.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}_0^k) \ \text{ si } mp > n \geq (m-1)p \text{ y } 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}.$$

- *PARTE IV: Si $\Omega$ es un dominio arbitrario en $\mathbb{R}^n$, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \ \text{ si } 0 < n - mp < k \leq n \text{ y } 1 \leq q < \frac{kp}{n-mp}.$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{j,\lambda}(\bar{\Omega_0^k}) \text{ si } mp > n \geq (m-1)p \text{ y } 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}.$$

***Demostración.*** Ver [1]. ■

**Teorema 2.15.** *(Desigualdad de Poincaré). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante $C = C(p, |\Omega|) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \ \forall\, u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

***Demostración.*** Ver [9]. ■

**Definición 2.16.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por:*

$$(L^p(0,\tau;X); \|\ .\ \|_{L^p(0,\tau;X)})$$

*al espacio de Banach de las funciones vectoriales medibles $u : (0,\tau) \to X$, tal que $\|u(t)\|_X$ pertenece a $L^p(0,\tau)$, provisto de la norma*

$$\|u\|_{L^p(0,\tau;X)} = \left(\int_0^\tau \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*En el caso $p = \infty$, denotaremos por $(L^\infty(0,\tau;X); \|\ .\ \|_{L^\infty(0,\tau;X)})$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales medibles $u : (0,\tau) \to X$, tal que $\|u(t)\|_X$ pertenece a $L^\infty(0,\tau)$, provisto de la norma*

$$\|u\|_{L^\infty(0,\tau;X)} = \sup_{t\in(0,\tau)} ess\|u(t)\|_X.$$

## 2.2 Sistemas dinámicos y atractores globales

En esta sección haremos una revisión sobre algunos tópicos referentes a la teoría de los sistemas dinámicos definidos por un semigrupo fuertemente continuo de un espacio de Banach $X$. Se repasará los resultados presentados en [4, 23, 42], y se hará un estudio más profundo de los trabajos de Chueshov y Lasiecka [13, 14, 15].

**Definición 2.17.** *Una familia de operadores no necesariamente lineales $S(t)_{t\geq 0}$, fuertemente continua en $X$, es llamado de $C_0 - semigrupo$ si:*

- *$S(0) = I$ (Operador identidad de $X$).*
- *$S(t+s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geq 0$.*
- *La aplicación $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \longmapsto S(t)(x) \in X$ es continua para cada $x \in X$ dado.*

*El par $(X, S(t))$ también es llamado sistema dinámico, definido por el semigrupo $S(t)$.*

**Definición 2.18.** *Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico y $\mathcal{A}$ un subconjunto de $X$.*

- *Diremos que $\mathcal{A}$ es positivamente invariante por la acción del semigrupo $S(t)$, cuando $S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.*
- *Diremos que $\mathcal{A}$ es invariante por la acción del semigrupo $S(t)$, cuando $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.*

**Definición 2.19.** *(Definición de Atractor Global). Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico. Diremos que un subconjunto $\mathcal{A} \subset X$ es un Atractor Global de $(X, S(t))$ cuando:*

- *$\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado y acotado,*
- *$\mathcal{A}$ es un conjunto invariante por $S(t)$,*
- *$\mathcal{A}$ atrae cualquier subconjunto acotado de $X$ por la acción del semigrupo $S(t)$, esto es, para todo conjunto acotado $B \subset X$,*

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(S(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

*donde $dist_H(A, B)$ es la semi-distancia de Hausdorff entre los subconjuntos $A, B \subset X$ y es dada por*

$$dist_H(A, B) := \sup_{x\in A} d_X(x, B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y).$$

**Definición 2.20.** *(Conjunto Absorbente). Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico. Un conjunto $\mathcal{B} \subset X$ es llamado de Conjunto Absorbente de $(X, S(t))$ si, para cualquier subconjunto acotado $B \subset X$, existe $\tau_0 = \tau_0(B) \geq 0$ tal que*

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq \tau_0.$$

*Cuando un sistema dinámico $(X, S(t))$ posee un conjunto absorbente acotado, diremos que $(X, S(t))$ es un sistema dinámico disipativo.*

**Definición 2.21.** *Dado un conjunto $B \subset X$, diremos que $W^u(B)$ es una variedad inestable de $B$, si es el conjunto de puntos $z \in X$ tal que contiene todas las trayectorias completas $\{y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ satisfaziendo*

$$y(0) = z, \quad \lim_{t\to-\infty} d_X(y(t), B) = 0.$$

**Definición 2.22.** *El conjunto de puntos estacionarios $\mathcal{N}$ del sistema dinámico $(X, S(t))$ es definido por:*

$$\mathcal{N} = \{v \in X \mid S(t)v = v, \forall t > 0\}.$$

**Definición 2.23.** *La función $\mathcal{L} \in C(X, \mathbb{R})$ es llamada de funcional de Lyapunov si*

$(i)$ *$\mathcal{L}(\zeta) \to \infty$ si y solo si $\|\zeta\|_X \to \infty$;*

$(ii)$ *$t \to \mathcal{L}(S(t)z)$ es no-creciente para todo $z \in X$.*

$(iii)$ *Si $\mathcal{L}(S(t)z) = \mathcal{L}(z)$ para todo $t > 0$, entonces $z$ es un punto estacionario para $S(t)$.*

Un sistema dinamico $(X, S(t))$ es llamado de sistema gradiente si posee un funcional de Lyapunov.

**Teorema 2.24.** *Todo sistema dinamico $(X, S(t))$ gradiente tal que el conjunto de puntos estacionarios de $S(t)$ sea acotado en $X$, es disipativo.*

***Demostración.*** Ver [13, 14, 15]. ■

**Definición 2.25** (Compacidad Asintótica)**.** *Un sistema dinámico $(X, S(t))$ es dicho Asintóticamente Compacto si existe un conjunto $K \subset X$ compacto tal que para cada conjunto acotado $B \subset X$,*

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(S(t)B, K) = 0.$$

Ahora presentaremos un resultado conocido sobre la existencia de atractores globales que será la piedra angular para la prueba de la existencia de un atractor global en nuestro trabajo, el lector interesado puede consultar [35, 42].

**Teorema 2.26.** *Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico. Entonces, diremos que dicho sistema dinámico posee atractor global $\mathcal{A}$ si, y solamente si, es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en caso afirmativo, si $\mathcal{B}$ denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de $X$, entonces el atractor $\mathcal{A}$ viene dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} w(B)$$

*donde $w(B)$ es el conjunto $w$-límite de $B$ y es dado por*

$$w(B) = \{x \in X \ : \ \textit{existen sucesiones } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ en } \mathbb{R}^+ \textit{ con } t_n \to \infty$$

$$\textit{e } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ en } B \textit{ , tal que } x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n\}.$$

*En particular, si el conjunto de puntos estacionario $\mathcal{N}$ de $S(t)$ es acotado en $X$, y el sistema $(X, S(t))$ es gradiente, entonces $\mathcal{A}$ esta caracterizado por las variedades inestables $W^u(\mathcal{N})$.*

***Demostración.*** Ver [35, 42]. ∎

El presente trabajo, debido a la densidad del material, la verificación de la compacidad asintótica puede ser bastante difícil. Por eso, introducimos el concepto de regularidad asintótica, que será usado junto a los resultados presentados por Chueshov y Lasiecka [13], donde muestran que en un sistema disipativo los conceptos de compacidad asintótica y regularidad asintótica son equivalente.

**Definición 2.27** (Regularidad Asintótica)**.** *Un sistema dinámico $(X, S(t))$ es Asintóticamente Regular si para cualquier conjunto acotado y positivamente invariante $B \subset X$, existe un conjunto compacto $K \subset \overline{B}^X$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(S(t)B, K) = 0.$$

**Teorema 2.28** ( Proposición 7.1.4 [13] )**.** *Asumamos que $X$ es un espacio de Banach y $(X, S(t))$ un sistema dinámico disipativo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$(X, S(t))$ es asintóticamente compacto.*
- *$(X, S(t))$ es asintóticamente regular.*

***Demostración.*** Ver [13]. ∎

**Definición 2.29.** *Sean $X, Y$ espacios de Banach reflexivos tal que $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ y $\mathcal{H} = X \times Y$. Supongamos que el semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$ es dado por*

$$S(t)z = (u(t), \partial_t u(t)),\ \ z = (u_0, u_1) \in \mathcal{H}$$

*donde*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y),$$

*Entonces $(\mathcal{H}, S(t))$ es llamado cuasi-estable sobre el conjunto $B \subset \mathcal{H}$ si existe una semi-norma compacta $\eta_X$ on $X$ y funciones escalares no-negativas $a(t)$ y $c(t)$ localmente limitadas sobre $\mathbb{R}^+$ y $b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ satisfaciendo que $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$ tales que*

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|^2_{\mathcal{H}} \leq a(t)\|z^1 - z^2\|^2_{\mathcal{H}}$$

*y*

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b(t)\|z^1 - z^2\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t) \sup_{0\leq s\leq t} \left[\eta_X(u^1(s) - u^2(s))\right]^2 \tag{2.1}$$

*para cualquier $z^1, z^2 \in B$. La norma $\eta_X$ es llamada compacta cuando para cualquier sucesión $x_n \rightharpoonup 0$ débilmente sobre $X$ tenemos que $\eta_X(x_n) \to 0$.*

**Proposición 2.30** (Proposición 7.9.4[15]). *Suponga que el sistema dinamico $(X, S(t))$ es cuasi estable sobre conjuntos positivamebte invariantes limitados. Entonces $(X, S(t))$ es asintóticamente regular.*

***Demostración.*** Ver [15]. ∎

**Teorema 2.31** (Corolario 7.5.7 [15]). *Supongamos que $(X, S(t))$ es un sistema dinámico asintóticamente regular. Asumamos que su funcional de Lyapunov $\Psi(x)$ es limitada superiormente sobre cualquier conjunto limitado de $X$ y que el conjunto $\Psi_R = \{x \in \mathcal{H} : \Psi(x) \leq R\}$ es limitado para todo $R \in \mathbb{R}$. Si el conjunto $\mathcal{N}$ de puntos estacionarios de $(X, S(t))$ es limitado, entonces $(X, S(t))$ posee un atractor global compacto $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{N})$.*

***Demostración.*** Ver [15]. ∎

**Teorema 2.32** (Teorema 7.9.8 [15]). *Supongamos que $(X, S(t))$ es un sistema dinámico posee un atractor compacto $A$ y que es cuasi estable sobre el atractor. Más aún que en $(2{,}1)$, $c(t)$ posee la propiedad de $c_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} c(t) < \infty$. Entonces cualquier trayectoria completa $\{(u(t), \partial_t u(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ que pertenece al atractor tiene las siguientes propiedades de regularidad*

$$\partial_t u \in L^\infty(\mathbb{R}; X) \cap C(X; Y), \quad \partial_t^2 u \in L^\infty(\mathbb{R}, Y)$$

*Más aún, existe $R > 0$ tal que*

$$\|(\partial_t u(t)\|_X^2 + \|\partial_t^2 u(t))\|_Y^2 \leq R^2,$$

*donde $R$ depende de $c_\infty$, la seminorma $\eta_X$ en $(2{,}1)$ y propiedades de inmersion de $X$ a $Y$.*

***Demostración.*** Ver [15]. ∎

## 2.3 Problema de Cauchy

En esta sección haremos una revisión sobre el problema de Cauchy y las *soluciones débiles* en el sentido de A. Pazy [37].

Consideremos el problema de valor inicial no-homogéneo

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \;\; t > 0 \tag{2.2}$$

$$u(0) = x$$

con $f : [0, \tau) \to X$, donde $A$ es un generador infinitesimal de un $C_0$-semigrupo $S(t)$, tal que la correspondiente ecuación homogénea tiene una solución única para cada valor $x \in dom(A)$.

**Definición 2.33.** *La función $u : [0, \tau] \to X$ es una solución clásica de $(2{,}2)$ en $[0, \tau)$, si $u$ es continua en $[0, \tau)$, continuamente diferenciable en $(0, \tau)$, $u(t) \in dom(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$ y $(2{,}2)$ se cumple en $[0, \tau)$.*

**Teorema 2.34.** *Si $f \in L^1(0, \tau; X)$, entonces para cada $x \in X$ el problema de valor inicial (2.2), tiene como máximo una solución (clásica) que es dada por*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

***Demostración.*** Ver [37]. ■

**Definición 2.35.** *Sea $A$ un generador infinitesimal de un $C_0$-semigrupo $S(t)$. Si $x \in X$ y $f \in L^1(0, \tau; X)$, entonces la función $u \in C([0, \tau]; X)$ es dada por*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \;\; t \in [0, \tau]. \tag{2.3}$$

*Dicha función $u$ es llamada solución débil de $(2{,}2)$ en $[0, \tau]$.*

**Observación 2.36.**

- *No toda solución débil es solución clásica.*
- *Es claro que si $f \in L^1(0, \tau; X)$, el problema $(2{,}2)$ tiene una única solución débil.*

## 2.4 Dos Teoremas Importantes

**Teorema 2.37** (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, con norma asociada $\| \cdot \|$ y $A(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal que satisface*

- *Es continua en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

- *Es coerciva en $\mathcal{H}$, esto es,* $\exists\alpha, \forall u \in \mathcal{H}, A(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$.
- $L(\cdot)$ *es una forma lineal en* $\mathcal{H}$.

*Entonces existe un único* $u_0 \in \mathcal{H}$ *tal que la ecuación* $a(u_0, v) = L(v)$ *se verifica para todo* $v \in \mathcal{H}$.

***Demostración.*** Ver [9]. ■

**Teorema 2.38** (Teorema de Lummer-Phillips)**.** *Sea* $A$ *una operador lineal definido sobre un subespacio* $D(A)$ *de un espacio de Banach reflexivo* $\mathcal{H}$*. Entonces* $A$ *genera un semigrupo de contracciones si y solamente si*

1. $A$ *es disipativo, esto es, para todo* $\lambda > 0$, $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|$.
2. $A - \lambda_0 I$ *es sobrejector para algun* $\lambda_0 > 0$

***Demostración.*** Ver [18]. ■

Capítulo

3

# Buena colocación

## 3.1 Entorno funcional

Como ya fue mecionado la ecuación

$$\partial_t^2 u - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u) + \alpha\partial_t u + f(u) = b(x),$$

está definida sobre una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera $\partial\Omega$ suave y satisfaciendo las condiciones de Dirichlet, esto es $u(x,t) = 0$ para $x \in \partial\Omega$ y $t \in \mathbb{R}^+$.

Además, asumiremos las siguientes hipótesis:

$(H1)$ La ecuación (1) posee condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; \partial_t u(x,0) = u_1(x), \tag{3.1}$$

para todo $x \in \Omega$. Aqui $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

$(H2)$ La función $b \in L^2(\Omega)$ es independiente del tiempo y representa alguna fuerza externa al sistema.

$(H3)$ La función $f = (f_1, f_2, f_3) \in (C^1(\mathbb{R}^3))^3$ satisface

$$f_i(0) = 0, \; i = 1,2,3,$$

y que existe una función $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\nabla F = f$$

junto con la condición de disipación para algunas constantes $M, m_f > 0$

$$f(u) \cdot u - F(u) \geq -M|u|^2 - m_f, \;\forall u \in \mathbb{R}^3 \tag{3.2}$$

$$F(u) \geq -M|u|^2 - m_f, \;\forall u \in \mathbb{R}^3 \tag{3.3}$$

donde

$$0 \leq M < \frac{\mu\lambda_1}{2}, \tag{3.4}$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor de $-\Delta$.

$(H4)$ Las funciones $f_i$ cumplen la restricción de crecimiento subcrítico: Existe $1 \leq p < 3$ y $M_f > 0$ tal que para cada $i = 1, 2, 3$ y para todo $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$

$$|\nabla f_i(u)| \leq M_f(1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} + |u_3|^{p-1}), \tag{3.5}$$

Con el fin de probar la buena colocación del problema es preciso construir un espacio donde habiten las soluciones débiles del problema (1). Dado que el problema contiene una convolución referente a la historia del material, se tendrá que definir una nueva variable que estará dentro de un espacio de Bochner con peso que se presentará en esta sección.

**Observación 3.1.** *Para facilitar las cuentas a lo largo del trabajo, usaremos ciertas notaciones que explicaremos a continuación:*

- *Se denotará a la norma en el espacio $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty]$ como:*

$$|u|_p := |u|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in L^p(\Omega).$$

*Así mismo, se denotará a la norma en el espacio $(L^p(\Omega))^3$*

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^{3} |u_i|_p^p\right)^{1/p}, \quad \forall\, u = (u_1, u_2, u_3) \in (L^p(\Omega))^3.$$

- *Además, se usará la misma notación para denotar el producto interno en $L^2(\Omega)$ y $(L^2(\Omega))^3$, para todo $p \in [1, \infty]$, esto es,*

$$\langle u, v\rangle := \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}, \quad \forall\, u, v \in L^2(\Omega)$$

*y*

$$\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{3}\langle u_i, v_i\rangle, \quad \forall\, u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in (L^2(\Omega))^3$$

*respectivamente.*

- *Similarmente, se denotará por* $\langle \nabla \cdot, \nabla \cdot\rangle$ *el producto interno en* $H_0^1(\Omega)$*, así como* $\langle \nabla \cdot, \nabla \cdot\rangle$ *el producto interno en* $(H_0^1(\Omega))^3$*. En este contexto tenemos que: Dados* $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in (H_0^1(\Omega))^3$

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle := \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla u_i, \nabla v_i\rangle .$$

- *Denotamos por*

$$\mathcal{E}u = -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u)$$

*el operador de elasticidad cuyo dominio es*

$$D(\mathcal{E}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^3,$$

*donde se cumple la inmersión compacta*

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Definimos en $(H_0^1(\Omega))^3$ el producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle_e$ dado por:

$$\langle v, w\rangle_e = \mu \langle \nabla v, \nabla w\rangle + (\lambda + \mu) \langle \mathrm{div} u, \mathrm{div} w\rangle .$$

Así se obtiene que $((H_0^1(\Omega))^3, \langle \cdot, \cdot\rangle_e)$ es también un espacio de Hilbert. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

**Lema 3.2.** *En* $(H_0^1(\Omega))^3$*, las normas* $\| \cdot \|_e^2 := \sqrt{\langle \cdot, \cdot\rangle_e}$ *y* $\|\nabla \cdot \|_2^2 := \sqrt{\langle \nabla \cdot, \nabla \cdot\rangle}$ *cumplen*

$$\mu\|\nabla \cdot \|_2^2 \leq \| \cdot \|_e^2 \leq a_0\|\nabla \cdot \|_2^2,$$

*donde* $a_0 = \mu + 3(\lambda + \mu)$*.*

***Demostración.*** El resultado sigue de la desigualdad

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

En efecto, dado $u = (u_1, u_2, u_3) \in (H_0^1(\Omega))^3$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|u\|_e^2 &= \mu\|\nabla u\|_2^2 + (\lambda+\mu)\left\langle \mathrm{div} u, \mathrm{div} u\right\rangle \\
&= \mu\|\nabla u\|_2^2 + (\lambda+\mu)\int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 (x)dx \\
&\leq \mu\|\nabla u\|_2^2 + 3(\lambda+\mu)\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] (x)dx \\
&\leq \mu\|\nabla u\|_2^2 + 3(\lambda+\mu)\left[\|\nabla u_1\|_2^2 + \|\nabla u_2\|_2^2 + \|\nabla u_3\|_2^2\right] \\
&\leq \mu\|\nabla u\|_2^2 + 3(\lambda+\mu)\|\nabla u\|_2^2
\end{aligned}
$$

lo que prueba la afirmación. ■

Notemos que si $u \in D(\mathcal{E})$ y $v \in (H_0^1(\Omega))^3$ entonces por el Teorema de la divergencia

$$\langle \mathcal{E}u, v\rangle = \langle u, v\rangle_e . \tag{3.6}$$

Esta última ecuación, el Lema 3.2 y la inmersion compacta de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ prueban que $\mathcal{E}$ es un operador positivo y autoadjunto. Por lo tanto existen las potencias fraccionales asociadas a $\mathcal{E}$ los cuales denotamos por $X^r$. Esto significa, $X^r := D(\mathcal{E}^r)$ que tiene tiene como producto interno natural $\langle \cdot,\cdot\rangle_r := \langle \mathcal{E}^r\cdot, \mathcal{E}^r\cdot\rangle$. In particular

$$
\begin{aligned}
X^0 &= ((L_2(\Omega))^3; \langle\cdot,\cdot\rangle), \\
X^{1/2} &= \left((H_0^1(\Omega))^3; \left\langle \mathcal{E}^{1/2}\cdot, \mathcal{E}^{1/2}\cdot\right\rangle\right), \\
X^1 &= (D(\mathcal{E}); \langle \mathcal{E}\cdot, \mathcal{E}\cdot\rangle).
\end{aligned}
$$

**Observación 3.3.** *Por el Teorema de representación de Riesz y argumentos de densidad y continuidad tenemos que $\langle u, v\rangle_{1/2} = \langle u, v\rangle_e$ for all $u, v \in (H_0^1(\Omega))^3$.*

Así, definimos el espacio de fase débil

$$\mathcal{H} := X^{1/2} \times X^0$$

con producto interno definido como el producto de productos internos de $X^{1/2}$ y $X^0$, esto es, dados $(u, v), (w, z) \in \mathcal{H}$ tenemos

$$\langle (u, v), (w, z)\rangle_{\mathcal{H}} := \langle u, w\rangle_e + \langle v, z\rangle$$

dicho producto interno induce la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ que satisface

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_e^2 + \|v\|_2^2.$$

Similarmente, definimos el espacio de fase fuerte como el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H}^1 := X^1 \times X^{1/2},$$

con producto interno definido como el producto de productos internos de $X^1$ y $X^{1/2}$, esto es, dados $(u,v),(w,z) \in \mathcal{H}^1$ tenemos

$$\langle (u,v),(w,z)\rangle_{\mathcal{H}^1} := \langle \mathcal{E}u, \mathcal{E}w\rangle + \langle v, z\rangle_e$$

y que cuya norma inducida $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$ que satisface

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \|\mathcal{E}u\|_2^2 + \|v\|_e^2.$$

## 3.2 Buena colocación

En esta sección probamos la existencia y unicidad de las soluciones para el sistema

$$\partial_t^2 u + \mathcal{E}u + \alpha\partial_t u + f(u) = b(x), \tag{3.7}$$

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{3.8}$$

y datos iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3.9}$$

Seguimos las mismas ideas que en [7] para obtener el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 3.4** (Buena colocación)**.** *Dado el sistema* $(3{,}7)-(3{,}9)$*. Supongamos que las asunciones* $(H1)-(H4)$ *se cumplen. Entonces*

$i)$ *Si* $(u_0,u_1) \in \mathcal{H}$*, el sistema* $(3{,}7)-(3{,}9)$ *posee una única solución*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; (H_0^1(\Omega))^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^3).$$

$ii)$ *Si* $(u_0,u_1) \in \mathcal{H}^1$*, el sistema* $(3{,}7)-(3{,}9)$ *posee una única solución*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (H_0^1(\Omega))^3).$$

*iii)* *Para cualquier $T > 0$ y cualquier conjunto limitado $B \in \mathcal{H}$, existe una constante $C_{BT} > 0$ tal que para cualquier dos soluciones $z^i = (u^i, \partial_t u^i)$ con datos iniciales $z_0^i \in B$, $i = 1, 2$, tenemos*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{BT}\|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{3.10}$$

El item $i)$ garantiza la existencia de soluciones débiles, el item $ii)$ garantiza la existencia de soluciones fuertes y el item $iii)$ da la dependencia continua de las soluciones, lo que implica la unicidad de soluciones apartir del dato inicial.

Para demostrar el Teorema se siguen los mismos pasos que en [7], con lo que necesitaremos de los Lemas 3.5, 3.6 junto con la teoria clásica de semigrupos lineales [2],[23] y [37].

Escribamos el sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$ en su equivalente problema de Cauchy, para eso consideremos los siguientes operadores

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \partial_t u \end{bmatrix}, \ \ \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \mathcal{E} & \alpha \end{bmatrix}, \ \ \mathbb{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f(\cdot) & 0 \end{bmatrix}, \ \ \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(x) \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Por lo tanto el problema de Cauchy equivalente a nuestro sistema inicial es

$$\partial_t U + \mathbb{E}U + \mathbb{F}U = \mathbb{B}, \ \ U(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

donde el operador $\mathbb{E} : D(\mathbb{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ cumple

$$D(\mathbb{E}) := \{(u, v) \in \mathcal{H} \mid \mathcal{E}u + \alpha v \in X^0 \wedge v \in X^{1/2}\}.$$

Note que la condición $\mathcal{E}u + \alpha v \in X^0$ implica $u \in X^1$ con lo que se tiene $D(\mathbb{E}) = \mathcal{H}^1$.

**Lema 3.5.** *El operador $-\mathbb{E}$ es un generador infinitesimal de un $C_0$-semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$ .*

***Demostración.*** Sea $z = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathbb{E})$, entonces de (3.6)

$$\langle -\mathbb{E}z, z\rangle_{\mathcal{H}} = -\alpha\|v\|_2^2 \leq 0$$

lo cual prueba que $-\mathbb{E}$ es un operador disipativo.

Ahora, probaremos que el operador $Id + \mathbb{E}$ es sobrejectivo: esto es, para cualquier

$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$ existe $z = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathbb{E})$ satisfaciendo

$$(Id + \mathbb{E})z = \tilde{z} \tag{3.13}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} u - v & = \tilde{u} \\ \mathcal{E}u + (\alpha + 1)v & = \tilde{v} \end{cases} \tag{3.14}$$

con lo que obtenemos las ecuaciones

$$v = u - \tilde{u} \tag{3.15}$$

$$((\alpha + 1)Id + \mathcal{E})u = \tilde{v} + (\alpha + 1)\tilde{u} \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.16) por una funcion de prueba $\phi \in (H_0^1(\Omega))^3$ e integrando sobre $\Omega$, obtenemos

$$(\alpha + 1) \langle u, \phi \rangle + \langle u, \phi \rangle_e = \langle \tilde{v} + (\alpha + 1)\tilde{u}, \phi \rangle .$$

Por lo tanto (3.16) la siguiente formulación variacional

$$\mathcal{B}(u, \phi) = l(\phi) \;\; \forall \phi \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

donde

$$\mathcal{B}(u, \phi) = (\alpha + 1) \langle u, \phi \rangle + \langle u, \phi \rangle_e$$

y

$$l(\phi) = \langle \tilde{v} + (\alpha + 1)\tilde{u}, \phi \rangle .$$

$B$ es una forma bilineal y continua definida en $(H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3$. Por otro lado

$$\mathcal{B}(u, u) \geq \|u\|_e^2.$$

Así $\mathcal{B}$ es coercitivo y por el Teorema Lax-Milgram, la ecuación (3.16) tiene una única solución $u$ en $(H_0^1(\Omega))^3$. Por argumentos clásicos de regularidad elíptica $u \in D(\mathcal{E})$, lo que implica que $Id + \mathbb{E}$ es sobrejectiva. Finalmente, por el Teorema de Lummer-Phillips obtenemos el resultado.

■

**Lema 3.6.** *El operador $\mathbb{F}$ en $(3{,}11)$ es localmente Lipschitz sobre $\mathcal{H}$, esto es, para cualquier limitado $B \subset \mathcal{H}$ existe una constante $C_B$ tal que*

$$\|\mathbb{F}(\tilde{z}) - \mathbb{F}(z)\|_{\mathcal{H}} \leq C_B \|\tilde{z} - z\|_{\mathcal{H}}.$$

***Demostración.*** Sea $B$ un conjunto limitado de $\mathcal{H}$ y $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v}), z = (u, v) \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{F}(\tilde{z}) - \mathbb{F}(z)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \tilde{z} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f(\cdot) & 0 \end{bmatrix} z \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|(0, f(\tilde{u})) - (0, f(u))\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|f(\tilde{u}) - f(u)\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \|f_i(\tilde{u}) - f_i(u)\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |f_i(\tilde{u}(x)) - f_i(u(x))|^2 dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |\nabla f_i(\tilde{u}(x) + (\lambda_i)(u(x) - \tilde{u}(x)))|^2 |\tilde{u}(x) - u(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

esta última desigualdad devido al Teorema del Valor Medio y la desigualdad de Cauchy Schwarz, para algunos $\lambda_i \in (0, 1), i = 1, 2, 3$. Ahora de la equación (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{F}(\tilde{z}) - \mathbb{F}(z)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |\nabla f_i(\tilde{u}(x) + (\lambda_i)(u(x) - \tilde{u}(x)))|^2 |\tilde{u}(x) - u(x)|^2 dx \\
&\leq 21 M_f \int_\Omega (1 + \sum_{j=1}^{3} |u_j(x)|^{2(p-1)} + \sum_{j=1}^{3} |\tilde{u}_j(x)|^{2(p-1)}) |\tilde{u}(x) - u(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

Para obtener esta última desigualdad, se usa el hecho de que la función $x^2$ para $2 > 0$ es convexa que implica que, dados $x_1, x_2, \cdots, x_r \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^2 \leq r(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2).$$

separemos esta última suma en 3 partes

- $\int_\Omega |\tilde{u}(x) - u(x)|^2 dx = \|\tilde{u}(x) - u(x)\|_2^2$

- $\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |u_j(x)|^{2(p-1)}|\tilde{u}(x)-u(x)|^2dx$

  Usamos la desigualda de Holder para los valores $3/2$ y $3$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_j(x)|^{2(p-1)}|\tilde{u}(x)-u(x)|^2dx &\leq \left(\int_\Omega |u_j(x)|^{3(p-1)}dx\right)^{2/3}\left(\int_\Omega |\tilde{u}(x)-u(x)|^6dx\right)^{1/3}\\ &\leq \|u_j\|_{3(p-1)}^{2(p-1)}\|\tilde{u}-u\|_6^2\end{aligned}$$

  Note que $3(p-1)<6$, entonces por la inmersión continua $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $q\leq 6$ obtenemos que existe una constante $c$ tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_j(x)|^{p-1}|\tilde{u}(x)-u(x)|^2dx &\leq \|u_j\|_{3(p-1)}^{2(p-1)}\|\tilde{u}-u\|_6^2\\ &\leq c\|\nabla u_j\|_2^{2(p-1)}\|\nabla\tilde{u}-\nabla u\|_2^2\\ &\leq \frac{c}{\mu}\|\nabla u_j\|_2^{2(p-1)}\|\tilde{z}-z\|_{\mathcal{H}}^2\end{aligned}$$

  y ya que $\|\nabla u_j\|_2^2\leq\|\nabla u\|_2^2\leq\frac{1}{\mu}\|z\|_{\mathcal{H}}^2$, para $j=1,2,3$, se tiene que existe una constante positiva $C$ tal que

$$\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |u_j(x)|^{p-1}|\tilde{u}(x)-u(x)|^2dx\leq C\|\tilde{z}-z\|_{\mathcal{H}}^2\|z\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)}$$

- $\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\tilde{u}_j(x)|^{2(p-1)}|\tilde{u}(x)-u(x)|^2dx$

  De forma análoga al item anterior, se prueba que existe una constante positiva, el cual denotamos sin pérdida de generalidad por $C$ tal que

$$\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega |\tilde{u}_j(x)|^{p-1}|\tilde{u}(x)-u(x)|^2dx\leq C\|\tilde{z}-z\|_{\mathcal{H}}^2\|\tilde{z}\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)}$$

Concluimos entonces que existe una constante que seguimos denotando por $C>0$ tal que

$$\mathbb{F}(\tilde{z})-\mathbb{F}(z)\|_{\mathcal{H}}^2\leq C\|\tilde{z}-z\|_{\mathcal{H}}^2\left(1+\|\tilde{z}\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)}+\|z\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)}\right)$$

Para concluir la prueba resta recordar que el conjunto $B$ es limitado en $\mathcal{H}$, entonces existe una constante positiva $c_B$ tal que para todo $Z\in\mathcal{H}$

$$\|Z\|_{\mathcal{H}}\leq c_B.$$

Esto prueba que existe una constante positiva $C_B$ que cumple

$$\|\mathbb{F}(\tilde{z}) - \mathbb{F}(z)\|_{\mathcal{H}} \leq C_B \|\tilde{z} - z\|_{\mathcal{H}}.$$

■

Como una consecuencia de la buena colocación

**Corolario 3.7.** *Existe un semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$ asociado al sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$, donde el operador solución $S(t)$ es un $C_0$-semigrupo sobre $\mathcal{H}$.*

Definimos la energia asociada al sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$ como:

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2 + \textstyle\int_\Omega F(u)dx - \langle b(x), u\rangle \tag{3.17}$$

**Proposición 3.8.** *La energia asociada al sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$ es decreciente y se cumple que existen constantes positivas $K_1, K_2$ y $K_3$ tal que para todo $(u, \partial_t u) \in \mathcal{H}$,*

$$K_2\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2 - K_3 \leq E(t) \leq K_1\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + K_3. \tag{3.18}$$

Debido a la Proposición 3.8 que existen constantes positivas $K_1, K_2$ y $K_3$ tales que
***Demostración.*** Derivando $E(t)$ con respecto a $t$ se obtine

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_e^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u)\|_2^2 + \int_\Omega F(u)dx - \langle b(x), u\rangle \\
E'(t) &= \langle u, \partial_t u\rangle_e + \langle \partial_t u, \partial_{tt} u\rangle + \int_\Omega \langle f(u), \partial_t u\rangle_{\mathbb{R}^3} dx - \langle b(x), \partial_t u\rangle \\
&= \langle \mathcal{E}u, \partial_t u\rangle + \langle \partial_t u, \partial_{tt} u\rangle + \int_\Omega \langle f(u), \partial_t u\rangle_{\mathbb{R}^3} dx - \langle b(x), \partial_t u\rangle \\
&= \langle \partial_{tt} u + \mathcal{E}u + f(u) - b(x), \partial_t u\rangle \\
&= \langle -\alpha \partial_t u, \partial_t u\rangle
\end{aligned}$$

esta última igualdad sigue de la ecuación $(1)$. Por lo tanto

$$E'(t) = -\alpha\|\partial_t u\|_2^2 \leq 0, \ \forall t > 0. \tag{3.19}$$

Para demostrar la proposición, denotemos por

$$I = \int_\Omega F(u)dx - \langle b(x), u\rangle$$

a la segunda parte de $E(t)$.

- Integrando la ecuación $(3,3)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u(x))dx &\geq -M\int_\Omega |u(x)|^2dx - m_f\int_\Omega 1dx\\ &\geq -M\|u\|_2^2 - m_f|\Omega|\end{aligned}$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, de la Desigualdad de Young, se tiene

$$\langle b(x), u\rangle \leq \frac{\epsilon}{4}\|b\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\|u\|_2^2.$$

Luego

$$\begin{aligned}I &\geq -m_f|\Omega| - M\|u\|_2^2 - \frac{\epsilon}{4}\|b\|_2^2 - \frac{1}{\epsilon}\|u\|_2^2\\ &\geq -m_f|\Omega| - \frac{\epsilon}{4}\|b\|_2^2 - (\frac{M}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1\epsilon})\|\nabla u\|_2^2\\ &\geq -m_f|\Omega| - \frac{\epsilon}{4}\|b\|_2^2 - \left(\frac{M}{\lambda_1\mu} + \frac{1}{\lambda_1\mu\epsilon}\right)\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2\end{aligned}$$

que implica

$$E(t) \geq -m_f|\Omega| - \frac{\epsilon}{4}\|b\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{M}{\lambda_1\mu} - \frac{1}{\lambda_1\mu\epsilon}\right)\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2$$

Por la ecuación $(3,4)$, $0 \leq M < \frac{\mu\lambda_1}{2}$, lo que implica que $\frac{1}{2} - \frac{M}{\lambda_1\mu} > 0$. Asi tomando $\epsilon_0 = \frac{4}{\lambda_1\mu - 2M}$, se tiene que

$$\frac{1}{2} - \frac{M}{\lambda_1\mu} - \frac{1}{\lambda_1\mu\epsilon_0} > 0$$

- Integrando la ecuación $(3,2)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u(x))dx &\leq M\int_\Omega |u(x)|^2dx + m_f\int_\Omega 1dx + \int_\Omega f(u)\cdot udx\\ &\leq M\|u\|_2^2 + m_f|\Omega| + \int_\Omega f(u(x))\cdot u(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u)\cdot udx &= \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega f_i(u)\cdot u_i dx\\ &\leq \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |\nabla f_i(\lambda_i u)||u||u_i|dx\end{aligned}$$

para algunos $\lambda_i \in (0,1)$, $i=1,2,3$. Luego

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u)\cdot udx &\leq \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |\nabla f_i(\lambda_i u)||u||u_i|dx\\ &\leq \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega (1+\sum_{j=1}^{3}|u_j|^{p-1})|u||u_i|dx\\ &\leq 3\int_\Omega (1+\sum_{j=1}^{3}|u_j|^{p-1})|u|^2dx\\ &\leq 3\int_\Omega (1+3|u|^{p-1})|u|^2dx\\ &\leq 9\int_\Omega (|u|^2+|u|^{p+1})dx\end{aligned}$$

luego

$$\int_\Omega f(u)\cdot udx \leq 9(\|u\|_2^2+\|u\|_{p+1}^{p+1}).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}I &\leq \int_\Omega F(u(x))dx + \langle -b(x),u\rangle_{(L^2(\Omega))^3}\\ &\leq M\|u\|_2^2 + m_f|\Omega| + \int_\Omega f(u(x))\cdot u(x)dx + \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2\\ &\leq M\|u\|_2^2 + m_f|\Omega| + 9(\|u\|_2^2+\|u\|_{p+1}^{p+1}) + \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2\\ &\leq \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + m_f|\Omega| + (M+19/2)\|u\|_2^2 + 9\|u\|_{p+1}^{p+1}\end{aligned}$$

por las inmersiones $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $q \leq 6$, existe una constante positiva $c>0$ que satisface

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + m_f|\Omega| + (M + 19/2)\|u\|_2^2 + 9\|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + m_f|\Omega| + c\|\nabla u\|_2^2 + c\|\nabla u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + m_f|\Omega| + \frac{c}{\mu}\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{\mu^{(p+1)/2}}\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^{p+1} \end{aligned}$$

esto implica que

$$E(t) \leq \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + m_f|\Omega| + \left(\frac{c}{\mu} + \frac{1}{2}\right)\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{\mu^{(p+1)/2}}\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}$$

y ya que $|y|^2 \leq |y|^{p+1} + 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$ y $p \geq 1$, se tiene que

$$E(t) \leq \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + m_f|\Omega| + \left(\frac{c}{\mu} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{c}{\mu} + \frac{1}{2} + \frac{c}{\mu^{(p+1)/2}}\right)\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}$$

Para terminar la prueba, solo queda considerar

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{c}{\mu} + \frac{1}{2} + \frac{c}{\mu^{(p+1)/2}} \\ K_2 &= \frac{1}{2} - \frac{M}{\lambda_1\mu} - \frac{1}{\lambda_1\mu\epsilon_0} \\ K_3 &= \text{máx}\left\{m_f|\Omega| + \frac{\epsilon_0}{4}\|b\|_2^2 \ ; \ \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + m_f|\Omega| + \left(\frac{c}{\mu} + \frac{1}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

■

**Observación 3.9.** *Las constantes $K_1, K_2$ and $K_3$ en (3,18) no dependen de $\lambda$ y $E(t) + K_3 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Capítulo
4

# Existencia de atractor global

Como fue mencionado en la introducción, como última etapa en el desarrollo de ésta tesis, es la prueba de que el semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$ dado por la buena colocación en el Capítulo 3 posee atractor global. Así, nuestro principal resultado es:

**Teorema 4.1.** *Existe un semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$ asociado al sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$ el cual tiene un único atractor global $\mathcal{A}$, caracterizado por la variedad inestable de los puntos estacionarios del sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$. Más aún, $\mathcal{A}$ es limitado en el espacio de fase fuerte. En particular, cualquier trajectoria completa $\{(u(t), \partial_t u(t)), t \in \mathbb{R}\}$ que pertenece a $\mathcal{A}$ tiene la siguientes propiedades de regularidad:*

$$\partial_t u \in L^\infty(\mathbb{R}; (H_0^1(\Omega))^3) \cap C(\mathbb{R}; (L^2(\Omega))^3), \quad \partial_t^2 u \in L^\infty(\mathbb{R}; (L^2(\Omega))^3),$$

*y existe $R > 0$ tal que*

$$\|(\partial_t u(t), \partial_t^2 u(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R^2,$$

*donde $R$ no depende de $\lambda$.*

Para la demostración de este Teorema, desarrollaremos dos secciones, donde se mostrarán algunos resultados claves para tal fin.

## 4.1 Sistema gradiente

Comenzamos definiendo nuestro funcional de Lyapunov

**Lema 4.2.** *El funcional definido por*

$$\begin{aligned}\Psi :&\mathcal{H} \to \mathbb{R}\\ &z \to \Psi(z) = \Psi(u,v) =\\ &\quad \frac{1}{2}\|(u,v)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_\Omega F(u)dx - \langle b(x), u\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.1}$$

*es un funcional Lyapunov estricto y el conjunto de puntos estacionarios del sistema* $(3{,}7)-(3{,}9)$ *es limitado sobre* $\mathcal{H}$

***Demostración.*** Fijemos $z_0 \in \mathcal{H}$ y denotemos por $\mathcal{N}$ el conjunto de puntos estacionarios del sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$.

- De $(3{,}19)$ se sigue que $\Psi(S(t)z_0)$ es decreciente con respecto al tiempo.
- De $(3{,}18)$ y $(3{,}19)$ obtenemos que $\Psi(z) = \Psi(S(0)z) \to \infty$ si y solamente si $|z|_{\mathcal{H}} \to \infty$.
- Supongamos que $\mathcal{L}(S(t)z_0) = \mathcal{L}(z_0)$ para todo $t > 0$.

  Entonces derivando esta igualdad con respecto a $t$ se tiene que

  $$\|\partial_t u\|_2^2 = 0, \forall t > 0,$$

  donde $(u, \partial_t u)$ es la solución del sistema $(3{,}7) - (3{,}8)$ con datos iniciales $z_0$. Por lo tanto $\partial_t u = 0$ en $(L^2(\Omega))^3$, así

  $$(u, \partial_t u) \in \mathcal{N} = \{(u,0) \in \mathcal{H} \mid u \text{ satisface } (4{,}2)\}$$

  donde

  $$\begin{cases} \mathcal{E}u + f(u) = b(x) & \text{en } \Omega,\\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

  Ahora, multiplicando por $u$ e integrando sobre $\Omega$ la primera igualdad de $(4{,}2)$

  $$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}u, u\rangle + \langle f(u), u\rangle &= \langle b(x), u\rangle\\ \|u\|_e^2 &= -\langle f(u), u\rangle + \langle b(x), u\rangle\end{aligned}$$

Sumando $(3{,}2)$ y $(3{,}3)$ e integrando se tiene que

$$\begin{aligned} f(u)\cdot u &\geq -2M|u|^2 - 2m_f \\ \langle f(u), u\rangle &\geq -2M\|u\|_2^2 - 2m_f|\Omega| \end{aligned}$$

Así, aplicando la Desigualdad de Young con $\epsilon > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \|u\|_e^2 &= -\langle f(u), u\rangle + \langle b(x), u\rangle \\ &\leq 2M\|u\|_2^2 + 2m_f|\Omega| + \epsilon\|b\|_2^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|u\|_2^2 \\ &\leq 2m_f|\Omega| + \epsilon\|b\|_2^2 + (2M + \frac{1}{4\epsilon})\frac{1}{\lambda_1}\|\nabla u\|_2^2 \\ &\leq 2m_f|\Omega| + \epsilon\|b\|_2^2 + (\frac{2M}{\lambda_1\mu} + \frac{1}{4\mu\lambda_1\epsilon})\|u\|_e^2 \end{aligned}$$

que implica

$$\left(1 - \frac{2M}{\lambda_1\mu} - \frac{1}{4\lambda_1\mu\epsilon}\right)\|u\|_e^2 \leq 2m_f|\Omega| + \epsilon\|b\|_2^2, \tag{4.3}$$

luego, de la ecuación $(3{,}4)$, tomando $\epsilon_0 = \frac{1}{2(\lambda_1\mu - 2M)}$, obtenemos que $\mathcal{N}$ es limitado sobre $\mathcal{H}$.

■

Así, tenemos como una inmediata consecuencia del Teorema 2.26 la siguiente proposición.

**Proposición 4.3.** *Bajo las condiciones* $(H1)$-$(H4)$*. El semigrupo* $(\mathcal{H}, S(t))$ *es de tipo gradiente. Más aún, si existe un atractor global* $\mathcal{A}$ *asociado a este semigrupo, entonces* $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{N})$*.*

## 4.2 Desigualdad de estabilidad

En esta subsección nosotros probamos la propiedad de la cuasi estabilidad para el semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$ asociado al sistema $(3{,}7) - (3{,}9)$. Esta propiedad es necesaria para probar la existencia de atractor global con dimension finita (cf.[15]).

En esta sección, nuestro principal es el siguiente teorema:

**Teorema 4.4** (Cuasi-estabilidad)**.** *Sea* $B$ *un conjunto limitado de* $\mathcal{H}$*. Sea* $\tilde{z} = (v, \partial_t v)$ *y* $z = (u, \partial_t u)$ *dos soluciones débiles del sistema* $(3{,}7) - (3{,}9)$ *tales que* $\tilde{z}(0) = (v_0, v_1)$, $z(0) = (u_0, u_1)$

*pertenecen a $B$, entonces*

$$\|\tilde{z}(t)-z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b(t)\|\tilde{z}(0)-z(0)\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t).\sup_{0\leq s\leq t}\|v-u\|_{k_0}^2,$$

*donde $k_0 = \text{máx}\{p+1, \frac{6}{4-p}\} < 6$, $\text{lím}_{t\to\infty} b(t) = 0$ y $c(t)$ es constante.*

***Demostración.*** Debido a que en la demostración se necesitaran muchos cálculos, dividiremos la prueba en varios lemas, dichos lemas serán enunciados y probados en el transcurso de esta sección.

Comencemos denotando por $\omega = u - v$, entonces formamos nuestro nuevo sistema

$$\begin{cases} \partial_t^2\omega + \mathcal{E}\omega + \alpha\partial_t\omega + f(u) - f(v) = 0 & \text{en } \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \omega = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \omega(x,0) = u_0(x) - v_0(x) & \text{en } \Omega, \\ \partial_t\omega(x,0) = u_1(x) - v_1(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

Definimos la energía lineal asociada al sistema $(4{,}4)$ por

$$\Xi(t) := \frac{1}{2}\|(\omega,\partial_t\omega)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\|\omega\|_e^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t\omega\|_2^2, \tag{4.5}$$

el funcional

$$\chi(t) = \langle\omega,\partial_t\omega\rangle \tag{4.6}$$

y $\Upsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ by

$$\Upsilon(t) = \epsilon_1\Xi(t) + \epsilon_2\chi(t) \tag{4.7}$$

donde las constantes $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ serán elegidas después.

El primer resultado que necesitamos es que nuestra energía lineal y el operador $\Upsilon$ son equivalentes, esto es,

**Lema 4.5.** *Existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_2\Xi(t) \leq \Upsilon(t) \leq C_1\Xi(t) \tag{4.8}$$

***Demostración.*** De la Desigualdad de Young, tenemos

$$\begin{aligned}|\chi(t)| &\leq \frac{1}{2}\left(\|\omega\|_2^2 + \|\partial_t\omega\|_2^2\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}\|\nabla\omega\|_2^2 + \|\partial_t\omega\|_2^2\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1\mu}\|\omega\|_e^2 + \|\partial_t\omega\|_2^2\right)\\ &\leq \text{máx}\left\{\frac{1}{\lambda_1\mu}, 1\right\}\Xi(t)\end{aligned}$$

Entonces, consideremos $K' = \text{máx}\left\{\frac{1}{\lambda_1\mu}, 1\right\}$, $\epsilon_1 > \epsilon_2 K'$, $C_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2 K'$ y $C_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 K'$
■

**Lema 4.6** (estimando $\Xi'$). *Dado $\xi > 0$, existe una constante $C(\xi)$ el cual depende de $\xi$ tal que*

$$\Xi'(t) \leq -\alpha\|\partial_t\omega\|_2^2 + C(\xi)\|\omega\|_{\frac{6}{4-p}}^2 + \xi\|\partial_t\omega\|_2^2,$$

***Demostración.*** Derivando $\Xi(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Xi'(t) &= \langle\omega, \partial_t\omega\rangle_e + \left\langle\partial_t\omega, \partial_t^2\omega\right\rangle\\ &= \left\langle\mathcal{E}\omega + \partial_t^2\omega, \partial_t\omega\right\rangle\\ &= \langle -\alpha\partial_t\omega - f(u) + f(v), \partial_t\omega\rangle\\ &= -\alpha\|\partial_t\omega\|_2^2 - \langle f(u) - f(v), \partial_t\omega\rangle\,.\end{aligned}$$

Adicionalmente

$$\begin{aligned}|\langle f(u) - f(v), \partial_t\omega\rangle| &= \left|\sum_{i=1}^3\int_\Omega (f_i(u) - f_i(v))\partial_t\omega_i dx\right|\\ &\leq \sum_{i=1}^3\int_\Omega |f_i(u) - f_i(v)||\partial_t\omega_i|dx\\ &\leq \sum_{i=1}^3\int_\Omega |f_i(u + \gamma_i(v-u))||\omega||\partial_t\omega_i|dx\end{aligned}$$

para algunos $\gamma_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, 3$. Luego

$$|\langle f(u) - f(v), \partial_t\omega\rangle| \leq M_f\sum_{i=1}^3\int_\Omega\left\{1 + \sum_{j=1}^3|v_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^3|u_j|^{p-1}\right\}|\omega||\partial_t\omega_i|dx$$

aplicando la desigualdad de Hölder generalizada para $\frac{6}{p-1} > 0$, $\frac{6}{4-p} > 0$ y $2$ obtenemos que para todo $j = 1, 2, 3$ y para todo $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |v_j|^{p-1}|\omega||\partial_t \omega_i| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |v_j|^{(p-1)\frac{6}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{6}} \left(\int_{\Omega} |\omega|^{\frac{6}{4-p}} dx\right)^{\frac{4-p}{6}} \left(\int_{\Omega} |\partial_t \omega_i|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \|v_j\|_6^{p-1} \|\omega\|_{\frac{6}{4-p}} \|\partial_t \omega_i\|_2.\end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que para todo $j = 1, 2, 3$ y para todo $i = 1, 2, 3$

$$\int_{\Omega} |u_j|^{p-1}|\omega||\partial_t \omega_i| dx \leq \|u_j\|_6^{p-1} \|\omega\|_{\frac{6}{4-p}} \|\partial_t \omega_i\|_2.$$

y que para todo $i = 1, 2, 3$

$$\int_{\Omega} |\omega||\partial_t \omega_i| dx \leq |\Omega|^{(p-1)/6} \|\omega\|_{\frac{6}{4-p}} \|\partial_t \omega_i\|_2.$$

Por lo tanto se obtiene

$$| \langle f(u) - f(v), \partial_t \omega \rangle | \leq \sum_{i=1}^{3} M_f \left\{ |\Omega|^{\frac{p-1}{6}} + \sum_{j=1}^{3} \|v_j\|_6^{p-1} + \sum_{j=1}^{3} \|u_j\|_6^{p-1} \right\} \|\omega\|_{\frac{6}{4-p}} |\partial_t \omega_i|_2 \tag{4.9}$$

Debido a la inmersión continua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, existe una constante positiva $c$ tal que para todo $j = 1, 2, 3$ se cumple que

$$\begin{aligned}\|u_j\|_6 &\leq c\|\nabla u_j\|_2 \leq c\|\nabla u\|_2 \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} \|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}}, \\ \|v_j\|_6 &\leq c\|\nabla v_j\|_2 \leq c\|\nabla v_j\|_2 \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} \|(v, \partial_t v)\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, por la Proposición 3.8 se tiene que

$$\begin{aligned}\|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H}} &\leq \left(\frac{K_1}{K_2} \|z(0))\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + \frac{2K_3}{K_2}\right)^{1/2}, \\ \|(v, \partial_t v)\|_{\mathcal{H}} &\leq \left(\frac{K_1}{K_2} \|\tilde{z}(0))\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + \frac{2K_3}{K_2}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

eso último y la hipótesis de que el conjunto $B$ es limitado en $\mathcal{H}$ muestran que existe una constane $C_B$ que depende del conjunto $B$ tal que

$$M_f \left\{ |\Omega|^{\frac{p-1}{6}} + \sum_{j=1}^{3} \|v_j\|_6^{p-1} + \sum_{j=1}^{3} \|u_j\|_6^{p-1} \right\} \leq C_B.$$

Por último, el resultado sigue de la desigualdad general de Young. ■

**Lema 4.7** (estimando $\chi'$). *Existe una constante $C(B)$ que depende de $B$ tal que*

$$\chi'(t) \leq -\Xi(t) - \frac{1}{2}\|\omega\|_e^2 + \frac{\alpha}{2}\|\omega\|_2^2 + C(B)\|\omega\|_{p+1}^2 + \frac{3+\alpha}{2}\|\partial_t\omega\|_2^2.$$

***Demostración.*** La deriva de $\chi(t)$ es

$$\chi'(t) = \|\partial_t\omega\|_2^2 + \left\langle \omega, \partial_t^2\omega \right\rangle$$

Multiplicando $(4{,}4)$ por $\omega$ e integrando sobre $\Omega$ se tiene que

$$\left\langle \partial_t^2\omega + \mathcal{E}\omega + \alpha\partial_t\omega + f(u) - f(v), \omega \right\rangle = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\chi'(t) &= \|\partial_t\omega\|_2^2 - \langle \mathcal{E}\omega, \omega\rangle - \alpha\langle \partial_t\omega, \omega\rangle - \langle f(u) - f(v), \omega\rangle \\
&= -\Xi(t) + \frac{1}{2}\|\omega\|_e^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t\omega\|_2^2 + \|\partial_t\omega\|_2^2 - \|\omega\|_e^2 - \alpha\langle \partial_t\omega, \omega\rangle - \langle f(u) - f(v), \omega\rangle \\
&= -\Xi(t) - \frac{1}{2}\|\omega\|_e^2 + \frac{3}{2}\|\partial_t\omega\|_2^2 - \alpha\langle \partial_t\omega, \omega\rangle - \langle f(u) - f(v), \omega\rangle.
\end{aligned}$$

por la Desigualdad de Young

$$-\alpha\langle \partial_t\omega, \omega\rangle \leq \frac{\alpha}{2}\|\omega\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\partial_t\omega\|_2^2$$

que implica

$$\chi'(t) = -\Xi(t) - \frac{1}{2}\|\omega\|_e^2 + \frac{(3+\alpha)}{2}\|\partial_t\omega\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\omega\|_2^2 - \langle f(u) - f(v), \omega\rangle.$$

Adicionalmente

$$
\begin{aligned}
|\langle f(u)-f(v),\omega\rangle| &= \left|\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega (f_i(u)-f_i(v))\omega_i dx\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |f_i(u)-f_i(v)||\omega_i|dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |f_i(u+\gamma_i(v-u))||\omega|^2dx
\end{aligned}
$$

para algunos $\gamma_i\in(0,1)$, $i=1,2,3$. Luego

$$
\begin{aligned}
|\langle f(u)-f(v),\partial_t\omega\rangle| &\leq M_f\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\left\{1+\sum_{j=1}^{3}|v_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{3}|u_j|^{p-1}\right\}|\omega|^2dx \\
&\leq 3M_f\int_\Omega\left\{1+\sum_{j=1}^{3}|v_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{3}|u_j|^{p-1}\right\}|\omega|^2dx
\end{aligned}
$$

aplicando la desigualdad de Hölder para $\frac{p+1}{p-1}>0$ y $\frac{p+1}{2}>0$ obtenemos que para todo $j=1,2,3$,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |v_j|^{p-1}|\omega|^2dx &\leq \left(\int_\Omega |v_j|^{(p-1)\frac{p+1}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int_\Omega |\omega|^{2\frac{p+1}{2}}dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \\
&\leq \|v_j\|_{p+1}^{p-1}\|\omega\|_{p+1}^2, \\
\int_\Omega |u_j|^{p-1}|\omega|^2dx &\leq \|u_j\|_{p+1}^{p-1}\|\omega\|_{p+1}^2, \\
\int_\Omega |\omega|^2dx &\leq |\Omega|^{(p-1)/(p+1)}\|\omega\|_{p+1}^2,
\end{aligned}
$$

lo que implica

$$
\langle f(v)-f(u),\omega\rangle \leq 3M_f\left\{|\Omega|^{(p-1)/(p+1)}+\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{p+1}^{p-1}+\sum_{i=1}^{3}\|v_i\|_{p+1}^{p-1}\right\}\|\omega\|_{p+1}^2
$$

La existencia de la contante $C(B)$ sigue análogamente a la exitencia de la constante $C_B$ del lema anterior.

■

Continuando con la prueba del Teorema principal de esta sección, derivamos $\Upsilon$

$$\begin{aligned}\Upsilon'(t) &= \epsilon_1\Xi'(t) + \epsilon_2\chi'(t)\\ &\leq -\epsilon_2\Xi(t) + \frac{\alpha\epsilon_2}{2}\|\omega\|_2^2 + \epsilon_2 C(B)\|\omega\|_{p+1}^2 + \epsilon_1 C(\xi)\|\omega\|_{\frac{6}{4-p}}^2 + \\ &\qquad + \left(\frac{3\epsilon_2+\alpha\epsilon_2}{2} + \epsilon_1\xi - \alpha\epsilon_1\right)\|\partial_t\omega\|_2^2\end{aligned}$$

donde el sistema

$$\begin{aligned}\epsilon_2 K' &< \epsilon_1\\ \frac{3\epsilon_2+\alpha\epsilon_2}{2} + \epsilon_1\xi &< \alpha\epsilon_1\end{aligned}$$

tiene una solución $\epsilon_1, \epsilon_2, \xi > 0$ el cual no depende de $\lambda$. Así, para $k_0 = \text{máx}\left\{\frac{6}{4-p}, p+1\right\}$ existe una constante $\grave{C} = \grave{C}_{B\epsilon_2\epsilon_1\xi\alpha} > 0$ tal que

$$\Upsilon'(t) \leq -\frac{\epsilon_2}{C_1}\Upsilon(t) + \grave{C}\|\omega\|_{k_0}^2$$

multiplicando esta última ecuación por $e^{\frac{\epsilon_2 t}{C_1}}$ e integrando de $0$ a $t$, se obtiene

$$\int_0^t d\left(e^{\frac{\epsilon_2 s}{C_1}}\Upsilon(s)\right) \leq \int_0^t e^{\frac{\epsilon_2 s}{C_1}}\grave{C}\|\omega(s)\|_{k_0}^2 ds$$

lo que implica

$$\Upsilon(t) \leq e^{-\frac{\epsilon_2 t}{C_1}}\Upsilon(0) + \grave{C}\int_0^t e^{-\frac{\epsilon_2}{C_1}(t-s)}\|\omega(s)\|_{k_0}^2 ds \tag{4.10}$$

**Observación 4.8.** *La independencia sobre $\lambda$ de $\epsilon_1, \epsilon_2$ implica que $C_1, C_2$ y $\grave{C}$ no dependen de $\lambda$.*

Luego, para alguna constante $C_4 > 0$ (que no depende de $t$ ni de $\lambda$), $(4{,}10)$ se escribe como

$$\Upsilon(t) \leq C_4 e^{-\frac{\epsilon_2 t}{C_1}}\Upsilon(0) + C_4 \sup_{0<s<t}\|\omega\|_{k_0}^2.$$

Por último, debido a $(4{,}8)$, obtenemos

$$\Xi(t) \leq \frac{C_1 C_4}{C_2} e^{\frac{-\gamma_0}{2}t} \Xi(0) + \frac{C_4}{C_2} \sup_{0<s<t} \|\omega\|_{k_0}^2$$

reemplazando $\Xi(t)$ obtenemos

$$\|\tilde{z}(t) - z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{C_1 C_4}{C_2} e^{\frac{-\gamma_0}{2}t} \|\tilde{z}(0) - z(0)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2C_4}{C_2} \sup_{0\leq s\leq t} \|v - u\|_{k_0}^2$$

lo que prueba el Teorema 4.4, tomando $b(t) = \frac{C_1 C_4}{C_2} e^{\frac{-\gamma_0}{2}t}$, $c(t) = \frac{2C_4}{C_2}$. ■

## 4.3 Prueba del Teorema 4.1

Ahora solo queda demostrar el Teorema 4.1. La demostración es una consecuencia inmediata de todos los resultados anteriores. Por la cuasi estabilidad, usando la Proposición 2.30, obtenemos que $(\mathcal{H}, S(t))$ es asintóticamente regular, adicionalmente por el Lema 4.2 tenemos que las condiciones del Teorema 2.31 son cumplidas, luego $(\mathcal{H}, S(t))$ tiene un atractor compacto $A$ que se escribe como $A = W^u(\mathcal{N})$. Por último, de la cuasi estabilidad y de la existencia del atractor obtenemos los resultados de regularidad mediante el Teorema 2.32.

# Bibliografía


[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Second edition. Pure and applied mathematics. Elsevier, 2003.

[2] J. Arrieta, A. N. Carvalho and J. K. Hale. A damped hyperbolic equation with critical exponent. *Communications in partial differential equations*, Vol 17(5-6), 841–866, 1992.

[3] J. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[4] A.V. Babin, M.I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, North-HollandAmsterdam1992

[5] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM journal on control and optimization*, Vol 30(5), 1024–1065, 1992.

[6] A. Bchatnia and M. Daoulatli. Behavior of the energy for Lamé systems in bounded domains with nonlinear damping and external force. *Electron. J. Diff. Equa.*, Vol 2013(1), 1–17, 2013.

[7] A. Bchatnia and A. Guesmia. Well-posedness and asymptotic stability for the Lamé system with infinite memories in a bounded domain. *Mathematical Control and Related Fields*, Vol 4(4), 451–463, 2014.

[8] M. Bellassoued. Energy decay for the elastic wave equation with a local time-dependent nonlinear damping. *Acta Mathematica Sinica, English Series*. Vol 24(7), 1175–1192, 2008.

[9] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext, Springer, 2010.

[10] V. Cerveny. *Seismic ray theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[11] V. Cerveny, I. Moloktov and I. Psencik. *Ray method in seismology*. Charles University Press, Prague, 1977.

[12] V. Cerveny, R. Ravindra. *Theory of seismic head waves*. Toronto University Press, Toronto, 1971.

[13] I. Chueshov, *Dynamics of quasi-stable dissipative systems*, Universitext, Springer, Cham, 2015.

[14] I. Chueshov, I. Lasiecka, *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Mem. Amer. Math. Soc. 195 9121–1832008

[15] I. Chueshov , I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations: Well-posedness and Long Time Dynamics*. Springer Science & Business Media, 2010.

[16] S. Cornbleet. Geometrical optics reviewed: a new light on an old subject. *Proc. IEEE*. Vol 71, 471-502, 1983.

[17] C. M. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*. Vol 37, 297–308, 1970.

[18] K. J. Engel, R. Nagel. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. 2000. Graduate Texts in Mathematics,2001.

[19] A. Eringen, E. Suhubi. *Elastodynamics, vol. II*. Academic, New York, 1975.

[20] F. Jhon. Almost global existence of elastic waves of finite amplitude arising from small initial disturbances. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol 41(5), 615–666, 1988.

[21] A. Guesmia. On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipations. *Asymptotic Analysis*, Vol 22, 1–13, 2000.

[22] A. Guesmia. *Contributions à la Contrôlabilité Exacte et la Stabilisation Des Systèmes D'évolution*. Ph.D. Thesis, Louis Pasteur University, France, 2000.

[23] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. American Mathematical Soc. No 25, 2010.

[24] W. Hansen. A new type of expansion in radiation problems. *Phys. Rev.* Vol 47, 139–143, 1935.

[25] M. A. Horn. Implications of sharp trace regularity results on boundary Stabilization of the system of linear elasticity. *J. Math. Anal. Appl*. Vol 223, 126–150, 1998.

[26] M. A. Horn. Stabilization of the dynamic system of elasticity by nonlinear boundary feedback. *Internal Ser. Numer. Math*. Vol 133, 201–210, 1999.

[27] M. Kline and I. Kay *Electromagnetic theory and geometrical optics*. Interscience,New York, 1965.

[28] H. Kolsky. *Stress waves in solids*. Vol 1098. Courier Corporation, 1963.

[29] V. Komornik. *Boundary stabilization of linear elasticity systems*. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 174, 135–146, 1996.

[30] J. E. Lagnese. *Uniform asymptotic energy estimates for solution of the equation of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary*. Nonlinear Anal. T. M. A.. 16, 35–54, 1991.

[31] G. Lamé. *Leçons sur la théorie mathématique de l'elasticité des corps solides*. Paris, Bachelier, 1852.

[32] A. E. H. Love. *Treatise on Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, 1866.

[33] P. Martinez. *Stabilisation de Systèmes Distribués Semi Linéaires: Domaines Presques Etoilés et Inégalités Intégrales généralisées*. Ph. D. Thesis, Louis Pasteur University, France, 1998.

[34] J. Miklowitz. *The theory of elastic waves and waveguides*. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[35] A. Miranville and S. Zelik, *Attractors for Dissipative Partial Differential Equations in Bounded and Unbounded Domains*, Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations, Volume 4, Chapter 3, C. M. Dafermos and M. Pokorny, Editors, Elsevier, 2008.

[36] P. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*. vol 2, McGraw-Hill, New York, 1953.

[37] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Science & Business Media, Vol 44, 2012.

[38] J. Pujol. *Elastic wave propagation and generation in seismology*. Cambridge University Press, Cambridge. 2003.

[39] T. C. Sideris. The null condition and global existence of nonlinear elastic waves. *Inventiones mathematicae*. Vol 123(2), 323–342, 1996.

[40] J. Stratton. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.

[41] O. Stavroudis. *The optics of rays, wavefronts and caustics*. Academic, New York, 1972.

[42] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Springer Science & Business Media Vol 68, 2012.

[43] K. Yamamoto. Exponential energy decay of solutions of elastic wave equations with the Dirichlet condition. *Mathematica Scandinavica*. 206–220, 1989.

[44] K. Yamamoto. Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations. *Japanese journal of mathematics. New series*, Vol 14(1), 119–163, 1988.